ข้อสอบคัดเลือกเข้ามหาวิทยาลัย คณิตศาสตร์ 1 กำหนดการเชิงเส้น

มีนาคม 2547

13. กำหนดให้ สมการจุดประสงค์คือ

$$P = a^2x + ay$$

โดย a เป็นจำนวนจริงบวก และอสมการข้อจำกัดคือ

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 8 \\ x + y &\geq 6 \\ x &> 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

ถ้าค่ามากที่สุดของ P เท่ากับ 70 แล้ว a เป็นจริงตามข้อใด (เฉลย: $4 \leq a < 7$)

1. $1 \leq a < 4$
2. $4 \leq a < 7$
3. $7 \leq a < 10$
4. $a \geq 10$

เส้นตรง $2x + y = 8$ ตัดแกน X และแกน Y ที่จุด $(4, 0)$ และ $(0, 8)$

เส้นตรง $x + y = 6$ ตัดแกน X และแกน Y ที่จุด $(6, 0)$ และ $(0, 6)$

หาจุดที่เส้นตรง $2x+y = 8$ ตัดกับเส้นตรง $x+y = 6$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $y = -2x+8$ และ $y = -x + 6$

$$\begin{aligned} -2x + 8 &= -x + 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

เส้นตรงตัดกันที่ $x = 2$ คือจุด $(2, -2 \cdot 2 + 8) = (2, 4)$

นำอสมการข้อจำกัดไปวาดกราฟ ได้พื้นที่รูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $A(2, 4), B(0, 8), C(0, 6)$ ซึ่งจุดเหล่านี้จะให้ค่าสูงสุด/ต่ำสุดของสมการจุดประสงค์

พิจารณาสมการจุดประสงค์ $P = a^2x+ay$ จะเห็นว่า P มีค่ามากเมื่อ x มีค่ามาก ดังนั้นค่าสูงสุดของ P เกิดที่จุด $A(2, 4)$

ถ้าค่าสูงสุด $P = 70$ อยู่ที่จุด $A(2, 4)$ ได้ว่า

$$P = 2a^2 + 4a = 70 \quad \Longrightarrow \quad a^2 + 2a - 35 = 0 = (a - 5)(a + 7)$$

a มีค่า 5 หรือ -7 แต่โจทย์กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $a = 5$

ถ้า $a = 5$ ได้สมการจุดประสงค์ $P = 25x + 5y$ และ

ที่จุด $A(2,4)$ ได้ $P = 25(2) + 5(4) = 70$

ที่จุด $B(0,8)$ ได้ $P = 25(0) + 5(8) = 40$

เราสรุปว่า $a = 5$ และ $4 \leq a < 7$

ตุลาคม 2546

14. กำหนดสมการจุดประสงค์คือ $P(x,y) = (a^2-1)x + ay$
โดยที่ a เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $a^2 - a - 2 \geq 0$ และมีสมการข้อจำกัดคือ

$$2 \leq x \leq 4 \qquad y \geq 1 \qquad x + y \leq 7$$

ถ้าค่าสูงสุดของ $P(x,y)$ เท่ากับ 41 แล้ว a มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ (เฉลย: $a \in [2.5, 3)$)

1. $[2, 2.5)$
2. $[2.5, 3)$
3. $[3, 3.5)$
4. $[3.5, 4)$

แก้อสมการหาค่า a

$$\begin{aligned} a^2 - a - 2 &\geq 0 \\ (a-2)(a+1) &\geq \\ a \leq -1 &\text{ หรือ } a \geq 2 \end{aligned}$$

แต่โจทย์กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $a \geq 2$

นำอสมการข้อจำกัดไปวาดกราฟ ได้พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมูมีจุดยอดที่ $A(2,5), B(4,3), C(4,1), D(2,1)$

จุดที่น่าจะให้ค่าสูงสุดของ P คือ $A(2,5)$ หรือ $B(4,3)$

พิจารณา $P(x,y) = (a^2-1)x + ay$ สังเกตว่า เมื่อ $a \geq 2$ แล้ว $a^2 - 1 > a$ เสมอ ดังนั้น $P(x,y)$ ให้ค่าสูงสุดเมื่อ x มีค่ามากๆ

ดังนั้นจุดที่จะให้ค่าสูงสุดของ $P(x,y)$ คือจุด $B(4,3)$

ถ้าจุด $B(4,3)$ ให้ค่าสูงสุด $P(4,3) = 41$ แล้ว

$$\begin{aligned}
P(4,3) &= 4(a^2-1)+3a \\
41 &= 4a^2-4+3a \\
4a^2+3a-45 &= 0 \\
a &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(4)(-45)}}{2(4)} \\
a &= \frac{-3\pm\sqrt{729}}{8} \\
a &= \frac{-3\pm 27}{8} \\
a &= \frac{-3-27}{8}, \frac{-3+27}{8} \\
a &= \frac{-30}{8}, 3
\end{aligned}$$

แต่ $a \geq 2$ ดังนั้น $a = 3$ และ $P(2,5) = 2(3^2-1)+5(3) = 16+15 = 31$ ไม่ขัดแย้งกับเงื่อนไขโจทย์

ดังนั้น $a \in [2.5, 3)$

มีนาคม 2546

5. กำหนดสมการจุดประสงค์คือ $P = 3x + 2y$ โดยมีอสมการข้อจำกัดคือ $0 \leq x \leq 4$ และ $6 \leq x + y \leq 7$ แล้วค่าสูงสุดของ P เท่ากับเท่าใด (เฉลย: 18)

จากอสมการข้อจำกัดวาดกราฟได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีจุดยอด $A(0,7), B(4,3), C(4,2), D(0,6)$

จุดที่น่าจะให้ค่าสูงสุดของ P คือ $A(0,7)$ หรือ $B(4,3)$

$$P(0,7) = 3(0) + 2(7) = 14$$

$$P(4,3) = 3(4) + 2(3) = 18$$

ดังนั้นค่าสูงสุดของ P เกิดที่ $B(4,3)$ และมีค่า 18

ตุลาคม 2545

14. กำหนดให้สมการจุดประสงค์คือ $P = 2ax + 3ay$ โดยที่ $a > 0$ อสมการข้อจำกัดคือ

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 1,000 \\ x + 3y &\leq 900 \\ x \geq 0, \quad y &\geq 0 \end{aligned}$$

ถ้าค่าสูงสุดของ P คือ $33,000$ แล้ว a เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้ (เฉลย: $20 < a \leq 30$)

1. $10 < a \leq 20$
2. $20 < a \leq 30$
3. $30 < a \leq 40$
4. $40 < a \leq 50$

เส้นตรง $2x + y = 1000$ ตัดแกน X และแกน Y ที่จุด $(500, 0)$ และ $(0, 1000)$

เส้นตรง $x + 3y = 900$ ตัดแกน X และแกน Y ที่จุด $(900, 0)$ และ $(0, 300)$

หาจุดที่เส้นตรง $2x + y = 1000$ ตัดกับเส้นตรง $x + 3y = 900$ จัดรูปสมการใหม่เป็น $y = -2x + 1000$ และ $y = -\frac{x}{3} + 300$

$$\begin{aligned} -2x + 1000 &= -\frac{x}{3} + 300 \\ 700 &= \frac{5x}{3} \\ x &= 420 \end{aligned}$$

เส้นตรงตัดกันที่ $x = 420$ คือจุด $(420, -2 \cdot 420 + 1000) = (420, 160)$

นำอสมการข้อจำกัดไปวาดกราฟ ได้พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $A(0, 300)$, $B(420, 160)$, $C(500, 0)$, $D(0, 0)$ซึ่งจุดเหล่านี้จะให้ค่าสูงสุด/ต่ำสุดของสมการจุดประสงค์

$$\begin{aligned} P(0, 300) &= 2a(0) + 3a(300) = 900a \\ P(420, 160) &= 2a(420) + 3a(160) = 840a + 480a = 1320a \\ P(500, 0) &= 2a(500) + 3a(0) = 1000a \end{aligned}$$

จุดที่ทำให้ P มีค่าสูงสุดคือ $B(420, 160)$

$$1320a = 33000 \quad \Longrightarrow \quad a = 25$$

ดังนั้น $20 < a \leq 30$

มีนาคม 2545

15. น้ำมันดีเซล 100 ลิตร ราคาต้นทุนลิตรละ 12 บาท และน้ำมันปาล์ม 120 ลิตร ราคาต้นทุนลิตรละ 8 บาท ถ้าจะผสมน้ำมันสองชนิดนี้รวมกันให้มีจำนวนไม่น้อยกว่า 150 ลิตร และขายน้ำมันผสมนี้ในราคาลิตรละ 11 บาท ให้ได้กำไรมากที่สุดแล้ว กำไรที่ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 230 บาท 2. 260 บาท 3. 330 บาท 4. 460 บาท

ให้ x แทนปริมาณน้ำมันดีเซล และ y แทนปริมาณน้ำมันปาล์ม ซึ่งจะนำมาใช้ผสม
ต้องการกำไรมากที่สุด คำนวณกำไรจากรายรับ หักด้วยต้นทุน
รายรับคือปริมาณน้ำมันที่ทั้งหมด $(x + y)$ ลิตร คูณกับราคาขายลิตรละ 11 บาท
น้ำมันดีเซลต้นทุนลิตรละ 12 บาท และน้ำมันปาล์มลิตรละ 8 บาท
ต้นทุนน้ำมันผสมคือ ต้นทุนน้ำมันดีเซล $12x$ บาท บวกกับต้นทุนน้ำมันปาล์ม $8y$ บาท
ดังนั้นกำหนดสมการจุดประสงค์

$$P = 11(x + y) - (12x + 8y) = -x + 3y$$

มีน้ำมันดีเซล 100 ลิตร

$$x \leq 100$$

มีน้ำมันปาล์ม 120 ลิตร

$$y \leq 120$$

ผสมรวมกันไม่น้อยกว่า 150 ลิตร

$$x + y \geq 150$$

นำอสมการข้อจำกัดไปวาดกราฟได้พื้นที่สามเหลี่ยม มีจุดยอดที่ $A(30, 120), B(100, 120), C(100, 50)$

พิจารณาสมการจุดประสงค์ $P = -x + 3y$ จะเห็นว่า P มีค่าสูงสุดเมื่อ x มีค่าน้อยๆและ y มีค่ามากๆ ซึ่งจุดที่มีสมบัติดังกล่าวคือ $A(30, 120)$

$$\begin{aligned} P(30, 120) &= -30 + 3(120) = 330 \\ P(100, 120) &= -100 + 3(120) = 260 \\ P(100, 50) &= -100 + 3(50) = 50 \end{aligned}$$

กำไรมากที่สุดคือ 330 บาท

เฉลยโดยพรเทพ ชัยกิจวัฒนะ ($www.intellectworld.com$)