

การแก้ระบบสมการดีกรีสอง

ปกติแล้วหนึ่งสมการซึ่งมีสองตัวแปร นำไปพล็อตเป็นกราฟบนระนาบ XY ได้หนึ่งรูป เช่น เส้นตรง เส้นโค้งพาราโบลา วงกลม วงรี ไฮเปอร์โบลา

นั่นคือสมการสองตัวแปรหนึ่งสมการ (algebraic form) จะจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่งกับกราฟเรขาคณิตบนระนาบ XY หนึ่งรูป (geometric form)

สังเกตว่าระนาบ XY นิยามจากผลคูณคาร์ทีเซียน

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in R \wedge y \in R\}$$

นั่นคือระนาบ XY คือเซตของจุดทั้งหมดที่กำหนดตำแหน่งโดยเส้นจำนวนจริงสองเส้นซึ่งตั้งฉากกัน

กราฟเรขาคณิตที่วาดจากสมการสองตัวแปรก็คือเซตของจุด (x, y) ซึ่ง x และ y สัมพันธ์กันตามเงื่อนไขสมการ เช่น สมการกำลังสอง

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

สร้างเป็นเซตจุด

$$G = \{(x, y) | y = (x - 1)^2 + 1\}$$

ซึ่งเมื่อนำไปพล็อตบนระนาบ XY เซตของจุดจะเรียงตัวต่อเนื่องเป็นเส้นโค้งพาราโบลา เห็นได้ชัดว่าเซตของจุดกราฟนี้เป็นเซตอนันต์ และเป็นสับเซตแท้ของระนาบ XY นั่นคือ

$$G \subset X \times Y$$

หากเรามีสมการสองตัวแปรที่แตกต่างกันสองสมการ เช่น $x + 2y + 3 = 0$ และ $x^2 + y^2 = 9$ นำสมการทั้งสองไปพล็อตเป็นกราฟสองรูปบนระนาบ XY ถ้าการกำหนดจุดเป็นไปอย่างแม่นยำแล้วเราจะทราบได้ทันทีว่ากราฟเส้นตรงและกราฟวงกลมนี้ตัดหรือสัมผัสกันหรือไม่ ที่จุดใด

ข้อเสียของวิธีหาผลเฉลยระบบสมการโดยวิธีเรขาคณิตนี้คือ ต้องใช้เวลามาก และคำตอบที่ได้เป็นเพียงค่าประมาณ อ่างถึงตัวอย่างที่แล้ว เปรียบเทียบกับวิธีพีชคณิต แนวคิดหลักวิธีพีชคณิตคือการหาผลตัด (intersection) ของเซตจุดสองเซต นั่นคือ เซตคำตอบ S ของระบบสมการกำหนดโดย

$$S = \{(x, y) | x + 2y + 3 = 0\} \cap \{(x, y) | x^2 + y^2 = 9\}$$

เราจะใช้วิธีพีชคณิตหาเซตคำตอบ (x, y) ซึ่งจุดคำตอบแต่ละจุดต้องเข้ากันได้กับเงื่อนไขของทุกสมการในระบบ ด้วยการรวมสองสมการเป็นสมการใหม่ซึ่งเหลือตัวแปรเดียว ซึ่งอาจจะเป็น x หรือ y ก็ได้และอาจจะมีหลายค่าก็ได้ นำค่าของตัวแปรที่เฉลยได้หนึ่งค่า แทนกลับในสมการอีกอันใดอันหนึ่ง เพื่อให้ได้ค่าของตัวแปรอีกตัวซึ่งเข้าคู่กันจับมาเขียนเป็นคู่อันดับ (x, y) ซึ่งจุดนี้เป็นคำตอบหนึ่งของระบบสมการ ทำซ้ำจนกว่าจะได้จุดคำตอบครบทั้งหมด ระบบสมการหนึ่งจะมีวิธีเฉลยได้หลายวิธี ซึ่งแน่นอนว่าจะมีวิธีที่ง่ายที่สุดเสมอ ขอให้ผู้อ่านพิจารณาโจทย์ให้ดี

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $x + y = 16$ และ $xy = 63$

$x + y = 16$	$xy = 63$
$x = 16 - y$	
	$(16 - y)y = 63$

$$16y - y^2 = 63$$

$$y^2 - 16y + 63 = 0$$

$$(y - 7)(y - 9) = 0$$

$$y - 7 = 0 \quad \text{หรือ} \quad y - 9 = 0$$

$$y = 7 \qquad y = 9$$

$$y = 7 \Rightarrow x = 16 - y = 16 - 7 = 9$$

$$y = 9 \Rightarrow x = 16 - y = 16 - 9 = 7$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(9, 7)$ และ $(7, 9)$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $x - y^2 = 0$ และ $x + 2y = 1$

$x - y^2 = 0$	$x + 2y = 1$
	$x = 1 - 2y$
$(1 - 2y) - y^2 = 0$	

$$(1 - 2y) - y^2 = 0$$

$$y^2 + 2y - 1 = 0$$

คำตอบของสมการนี้ไม่ใช่จำนวนเต็ม ต้องใช้สูตรเท่านั้น

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c = 0 &\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 y &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \\
 &= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} \\
 &= -1 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$y = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow x = 1 - 2y = 1 - 2(-1 + \sqrt{2}) = 1 + 2 - 2\sqrt{2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$y = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow x = 1 - 2y = 1 - 2(-1 - \sqrt{2}) = 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(3 - 2\sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ และ $(3 + 2\sqrt{2}, -1 - \sqrt{2})$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $y = x^2 - 2$ และ $2x - 3y = 1$

$y = x^2 - 2$	$2x - 3y = 1$
	$2x - 3(x^2 - 2) = 1$

$$2x - 3(x^2 - 2) = 1$$

$$-3x^2 + 2x + 6 = 1$$

$$3x^2 - 2x - 5 = 0$$

สัมประสิทธิ์ของเทอม x^2 ไม่ใช่ 1 ต้องใช้วิธีแยกตัวประกอบต่างออกไป ต้องหาจำนวนเต็ม a, b ซึ่ง $ab = 3(-5) = -15$ และ $a + b = -2$ ได้ว่า $a = -5, b = 3$ เปลี่ยน $-2x$ เป็น $-5x + 3x$

$$3x^2 + (-5x + 3x) - 5 = 0$$

$$(3x^2 - 5x) + (3x - 5) = 0$$

$$\begin{aligned}
 x(3x - 5) + (3x - 5) &= 0 \\
 (x + 1)(3x - 5) &= 0 \\
 x + 1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad 3x - 5 = 0 \\
 x = -1 \quad \quad \quad x = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

$$x = -1 \Rightarrow y = x^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$$

$$x = \frac{5}{3} \Rightarrow y = x^2 - 2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - 2 = \frac{25}{9} - \frac{18}{9} = \frac{7}{9}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(-1, -1)$ และ $(\frac{5}{3}, \frac{7}{9})$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $4x^2 - y^2 = 28$ และ $2x - y = 2$

$4x^2 - y^2 = 28$	$2x - y = 2$
$4x^2 - (2x - 2)^2 = 28$	$y = 2x - 2$ หรือ $x = \frac{y+2}{2}$

$$4x^2 - (2x - 2)^2 = 28$$

$$4x^2 - (2x - 2)(2x - 2) = 28$$

$$4x^2 - (4x^2 - 4x - 4x + 4) = 28$$

$$4x^2 - 4x^2 + 8x - 4 = 28$$

$$8x = 32$$

$$x = 4$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 2x - 2 = 2(4) - 2 = 6$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(4, 6)$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $x^2 - 2y^2 = 1$ และ $3x - y = 7$

$x^2 - 2y^2 = 1$	$3x - y = 7$
$x^2 - 2(3x - 7)^2 = 1$	$y = 3x - 7$

$$x^2 - 2(3x - 7)^2 = 1$$

$$x^2 - 2(3x - 7)(3x - 7) = 1$$

$$x^2 - 2(9x^2 - 21x - 21x + 49) = 1$$

$$x^2 - 18x^2 + 84x - 98 = 1$$

$$-17x^2 + 84x - 99 = 0$$

$$17x^2 - 84x + 99 = 0$$

สัมประสิทธิ์ของเทอม x^2 ไม่ใช่ 1 ต้องใช้วิธีแยกตัวประกอบต่างออกไป ต้องหาจำนวนเต็ม a, b ซึ่ง $ab = 17(99)$ และ $a + b = -84$ ได้ว่า $a = -17 \cdot 3, b = -3 \cdot 11$ เปลี่ยน $-84x$ เป็น $-51x - 33x$

$$17x^2 + (-51x - 33x) + 99 = 0$$

$$(17x^2 - 51x) - (33x - 99) = 0$$

$$17x(x - 3) - 33(x - 3) = 0$$

$$(17x - 33)(x - 3) = 0$$

$$17x - 33 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x - 3 = 0$$

$$x = \frac{33}{17} \quad x = 3$$

$$x = \frac{33}{17} \Rightarrow y = 3x - 7 = 3\left(\frac{33}{17}\right) - 7 = \frac{99}{17} - \frac{119}{17} = -\frac{20}{17}$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 3x - 7 = 3(3) - 7 = 2$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $\left(\frac{33}{17}, -\frac{20}{17}\right)$ และ $(3, 2)$

ตัวอย่าง ผลบวกของจำนวนเต็มบวกสองจำนวนเท่ากับ 14 และผลบวกของกำลังสองของทั้งสองจำนวนเป็น 106 จงหาสองจำนวนนั้น

$x + y = 14$	$x^2 + y^2 = 106$
$y = 14 - x$	$x^2 + (14 - x)^2 = 106$

$$\begin{aligned}
 x^2 + (14 - x)^2 &= 106 \\
 x^2 + 196 - 28x + x^2 &= 106 \\
 2x^2 - 28x + 196 - 106 &= 0 \\
 2x^2 - 28x + 90 &= 0 \\
 x^2 - 14x + 45 &= 0 \\
 (x - 9)(x - 5) &= 0 \\
 x - 9 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x - 5 = 0 \\
 x = 9 \quad \quad \quad x = 5
 \end{aligned}$$

สองจำนวนดังกล่าวคือ 5 และ 9

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $xy = 72$ และ $x^2 + y^2 = 145$

$xy = 72$	$x^2 + y^2 = 145$
$2xy = 144$	$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 145 + 144 = 289$
	$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = 145 - 144 = 1$

$x + y = \pm 17$ และ $x - y = \pm 1$ ได้ 4 กรณีย่อยดังนี้

$$\begin{aligned}
 x + y = 17 \wedge x - y = 1 &\Rightarrow x = 9 \wedge y = 8 \\
 x + y = 17 \wedge x - y = -1 &\Rightarrow x = 8 \wedge y = 9 \\
 x + y = -17 \wedge x - y = 1 &\Rightarrow x = -8 \wedge y = -9 \\
 x + y = -17 \wedge x - y = -1 &\Rightarrow x = -9 \wedge y = -8
 \end{aligned}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(9, 8)$, $(8, 9)$, $(-8, -9)$ และ $(-9, -8)$

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างระบบสมการซึ่งประกอบด้วยสมการดีกรีสองเท่านั้น ข้อที่จะต้องระวังเป็นพิเศษคือ

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

เพราะถ้าเราลืมค่า $x = -\sqrt{a}$ แล้วเราจะได้คำตอบไม่ครบ

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $x^2 + y^2 = 4$ และ $4x^2 + 9y^2 = 36$

$x^2 + y^2 = 4$ $x^2 = 4 - y^2$	$4x^2 + 9y^2 = 36$ $4(4 - y^2) + 9y^2 = 36$
------------------------------------	--

$$4(4 - y^2) + 9y^2 = 36$$

$$16 - 4y^2 + 9y^2 = 36$$

$$5y^2 = 20$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \pm 2$$

$$y = 2 \Rightarrow x^2 = 4 - y^2 = 4 - 2^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = -2 \Rightarrow x^2 = 4 - y^2 = 4 - (-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(0, 2)$ และ $(0, -2)$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $4x^2 - y = 3$ และ $3x^2 - 1 - 2y = 0$

$4x^2 - y = 3$ $y = 4x^2 - 3$	$3x^2 - 1 - 2y = 0$ $3x^2 - 1 - 2(4x^2 - 3) = 0$
----------------------------------	---

$$\begin{aligned}
3x^2 - 1 - 2(4x^2 - 3) &= 0 \\
3x^2 - 1 - 8x^2 + 6 &= 0 \\
-5x^2 + 5 &= 0 \\
-5x^2 &= -5 \\
x^2 &= 1 \\
x &= \pm 1
\end{aligned}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 4x^2 - 3 = 4(1)^2 - 3 = 1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 4x^2 - 3 = 4(-1)^2 - 3 = 1$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(1, 1)$ และ $(-1, 1)$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $3y^2 + 2x - 19 = 0$ และ $2y^2 - 7x + 4 = 0$

$3y^2 + 2x - 19 = 0$	$2y^2 - 7x + 4 = 0$
$3y^2 + 2\left(\frac{2y^2+4}{7}\right) - 19 = 0$	$x = \frac{2y^2+4}{7}$

$$3y^2 + 2\left(\frac{2y^2 + 4}{7}\right) - 19 = 0$$

$$21y^2 + 2(2y^2 + 4) - 133 = 0$$

$$21y^2 + 4y^2 + 8 - 133 = 0$$

$$25y^2 - 125 = 0$$

$$25y^2 = 125$$

$$y^2 = 5$$

$$y = \pm\sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2y^2 + 4}{7} = \frac{2(\sqrt{5})^2 + 4}{7} = 2$$

$$y = -\sqrt{5} \Rightarrow x = \frac{2y^2 + 4}{7} = \frac{2(-\sqrt{5})^2 + 4}{7} = 2$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(2, \sqrt{5})$ และ $(2, -\sqrt{5})$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $y^2 = 3xy + 5$ และ $y^2 + 6xy = 11$

$y^2 = 3xy + 5$	$y^2 + 6xy = 11$
$xy = \frac{y^2 - 5}{3}$	$y^2 + 6\left(\frac{y^2 - 5}{3}\right) = 11$
$x = \frac{y^2 - 5}{3y}$	

$$y^2 + 6\left(\frac{y^2 - 5}{3}\right) = 11$$

$$y^2 + 2(y^2 - 5) = 11$$

$$3y^2 - 10 = 11$$

$$3y^2 = 21$$

$$y^2 = 7$$

$$y = \pm\sqrt{7}$$

$$y = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{y^2 - 5}{3y} = \frac{(\sqrt{7})^2 - 5}{3(\sqrt{7})} = \frac{2}{3\sqrt{7}}$$

$$y = -\sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{y^2 - 5}{3y} = \frac{(-\sqrt{7})^2 - 5}{3(-\sqrt{7})} = -\frac{2}{3\sqrt{7}}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $\left(\frac{2}{3\sqrt{7}}, \sqrt{7}\right)$ และ $\left(-\frac{2}{3\sqrt{7}}, -\sqrt{7}\right)$

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการ $2x^2 + 4y^2 = 3a$ และ $3x^2 - 8y^2 = a$

$$\begin{array}{|l} 2x^2 + 4y^2 = 3a \\ 4x^2 + 8y^2 = 6a \end{array} \quad \begin{array}{|l} 3x^2 - 8y^2 = a \end{array}$$

นำสองสมการมาบวกกัน

$$\begin{aligned} (4x^2 + 8y^2) + (3x^2 - 8y^2) &= 6a + a \\ 7x^2 &= 7a \\ x^2 &= a \\ x &= \pm\sqrt{a} \end{aligned}$$

จัดรูปสมการโจทย์ใหม่ เพื่อหาค่า y จาก x ที่หามาได้

$$\begin{aligned} 3x^2 - 8y^2 &= a \\ 8y^2 &= 3x^2 - a \\ y^2 &= \frac{3x^2 - a}{8} \\ y &= \pm\sqrt{\frac{3x^2 - a}{8}} \end{aligned}$$

$$x = \sqrt{a} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3x^2 - a}{8}} = \pm\sqrt{\frac{3(\sqrt{a})^2 - a}{8}} = \pm\sqrt{\frac{2a}{8}} = \pm\frac{\sqrt{a}}{2}$$

$$x = -\sqrt{a} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{3x^2 - a}{8}} = \pm\sqrt{\frac{3(-\sqrt{a})^2 - a}{8}} = \pm\sqrt{\frac{2a}{8}} = \pm\frac{\sqrt{a}}{2}$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการคือ $(\sqrt{a}, \frac{\sqrt{a}}{2})$, $(\sqrt{a}, -\frac{\sqrt{a}}{2})$, $(-\sqrt{a}, \frac{\sqrt{a}}{2})$ และ $(-\sqrt{a}, -\frac{\sqrt{a}}{2})$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนบวกสองจำนวน ซึ่งผลบวกของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 208 และผลต่างของกำลังสองของแต่ละจำนวนเท่ากับ 80

$x^2 + y^2 = 208$	$x^2 - y^2 = 80$
$y^2 = 208 - x^2$	$x^2 - (208 - x^2) = 80$

$$x^2 - (208 - x^2) = 80$$

$$2x^2 - 208 = 80$$

$$2x^2 = 288$$

$$x^2 = 144$$

$$x = \pm 12$$

เลือกแต่คำตอบที่เป็นบวกตามเงื่อนไขโจทย์

$$x = 12 \Rightarrow y^2 = 208 - x^2 = 208 - 12^2 = 64 \Rightarrow y = \pm 8$$

จำนวนบวกสองจำนวนดังกล่าวคือ 8 และ 12

เรียบเรียงโดยพรเทพ ชัยกิจวัฒน์ (www.intellectworld.com)