

พาราโบลา

พาราโบลา คือเส้นโค้งบนระนาบ XY ซึ่งกำหนดโดยสมการกำลังสอง $y = ax^2 + bx + c$ โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0$

$a \neq 0$ เพราะถ้าหาก $a = 0$ ได้ว่า $y = ax^2 + bx + c = (0)x^2 + bx + c = bx + c$ เป็นสมการเส้นตรง

เรียกสมการ $y = ax^2 + bx + c$ ว่า สมการพาราโบลา

(อันที่จริงยังมีสมการพาราโบลาในรูป $x = ay^2 + by + c$ ซึ่งเกิดจากการสลับตัวแปร x และ y โดยพาราโบลาที่ได้จะมีแกนสมมาตรขนานกับแกน X)

พิจารณาสมการพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ขอให้มองว่าสมการพาราโบลาเป็นกล่องดำกล่องหนึ่งซึ่งรับค่า x เป็นอินพุต และจะคำนวณค่า y เป็นเอาต์พุตออกมา เราป้อนค่า x หนึ่งค่า จะได้ค่า y ที่เข้าคู่กันออกมาหนึ่งค่า เอาสองค่าดังกล่าวมาสร้างเป็นคู่อันดับ (x, y) ไปด้วยเป็นหนึ่งจุดบนระนาบ XY ทำซ้ำไปเรื่อยๆ จะได้เซตของจุดเรียงตัวกันอย่างต่อเนื่องเป็นเส้นโค้งพาราโบลา

ต่อไปเราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างสมการพาราโบลากับรูปร่างของพาราโบลาซึ่งกำหนดโดยสมการนั้น ลองจัดรูปสมการ $y = ax^2 + bx + c$ ใหม่ โดยใช้วิธีกำลังสองสัมบูรณ์

$$\begin{aligned}
 y &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\
 &= a \left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}
 \end{aligned}$$

$$= a \left(x - \left(-\frac{b}{2a} \right) \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

ให้ชื่อตัวแปรใหม่ $h = -\frac{b}{2a}$ และ $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$ ได้ว่า

$$y = a(x - h)^2 + k$$

รูปสมการใหม่ $y = a(x - h)^2 + k$ จะให้รูปพาราโบลาซึ่งมีลักษณะดังนี้

1. ถ้า $a > 0$ ได้พาราโบลาหงาย แต่ถ้า $a < 0$ ได้พาราโบลาคว่า
2. ถ้า $|a|$ น้อย พาราโบลากว้าง แต่ถ้า $|a|$ มาก พาราโบลาคแคบ
3. จุดยอดของพาราโบลายู่ที่พิกัด (h, k) ส่วนจะเป็นจุดต่ำสุดหรือจุดสูงสุด ขึ้นกับว่าเป็นพาราโบลาคว่าหรือหงาย
4. ค่าสูงสุด/ต่ำสุดของพาราโบลาคือ $y = k$
5. แกนสมมาตรของพาราโบลาคือ $x = h$ มักจะเรียกแกน $x = 0$ ว่าแกน Y

ค่า a จะเป็นตัวกำหนดรูปร่างของพาราโบลา (คว่ำหรือหงาย กว้างหรือแคบ) ส่วนค่า h, k กำหนดตำแหน่งของพาราโบลา

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์รูปร่างของพาราโบลาคจากสมการ $y = -3x^2$

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 \\ &= -3(x - 0)^2 + 0 \end{aligned}$$

พาราโบลาคว่า จุดสูงสุดอยู่ที่ $(0, 0)$ ค่าสูงสุดคือ $y = 0$ แกนสมมาตรคือ $x = 0$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์รูปร่างของพาราโบลาคจากสมการ $y = 3x^2 + 6$

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 6 \\ &= 3(x - 0)^2 + 6 \end{aligned}$$

พาราโบลางาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(0, 6)$ ค่าต่ำสุดคือ $y = 6$ แกนสมมาตรคือ $x = 0$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์รูปร่างของพาราโบลากจากสมการ $y = 2x^2 - 12x + 18$

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 12x + 18 \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) \\ &= 2[x^2 - 2(3)x + 3^2] \\ &= 2(x - 3)^2 + 0 \end{aligned}$$

พาราโบลางาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(3, 0)$ ค่าต่ำสุดคือ $y = 0$ แกนสมมาตรคือ $x = 3$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์รูปร่างของพาราโบลากจากสมการ $y = x^2 + 4x + 4$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 4x + 4 \\ &= (x + 2)^2 \\ &= [x - (-2)]^2 + 0 \end{aligned}$$

พาราโบลางาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(-2, 0)$ ค่าต่ำสุดคือ $y = 0$ แกนสมมาตรคือ $x = -2$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์รูปร่างของพาราโบลากจากสมการ $y = x^2 + 8x + 8$

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 8x + 8 \\ &= x^2 + 8x + 4^2 - 4^2 + 8 \\ &= (x^2 + 8x + 4^2) - 4^2 + 8 \\ &= (x + 4)^2 - 16 + 8 \\ &= [x - (-4)]^2 + (-8) \end{aligned}$$

พาราโบลางาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(-4, -8)$ ค่าต่ำสุดคือ $y = -8$ แกนสมมาตรคือ $x = -4$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์รูปร่างของพาราโบลากสมการ $y = -3x^2 - 18x + 17$

$$\begin{aligned}
 y &= -3x^2 - 18x + 17 \\
 &= -3\left(x^2 + 6x - \frac{17}{3}\right) \\
 &= -3\left(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 - \frac{17}{3}\right) \\
 &= -3\left[\left(x^2 + 6x + 3^2\right) - 3^2 - \frac{17}{3}\right] \\
 &= -3\left[\left(x + 3\right)^2 - \frac{27}{3} - \frac{17}{3}\right] \\
 &= -3\left[\left(x + 3\right)^2 - \frac{44}{3}\right] \\
 &= -3\left(x + 3\right)^2 + 44 \\
 &= -3\left[x - (-3)\right]^2 + 44
 \end{aligned}$$

พาราโบลาคว่า จุดสูงสุดอยู่ที่ $(-3, 44)$ ค่าสูงสุดคือ $y = 44$ แกนสมมาตรคือ $x = -3$

ตัวอย่าง จงวิเคราะห์รูปร่างของพาราโบลากสมการ $y = 2x^2 - 4x - 1$

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^2 - 4x - 1 \\
 &= 2\left(x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right) \\
 &= 2\left(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 - \frac{1}{2}\right) \\
 &= 2\left[\left(x^2 - 2x + 1^2\right) - \frac{3}{2}\right] \\
 &= 2\left[\left(x - 1\right)^2 - \frac{3}{2}\right] \\
 &= 2\left(x - 1\right)^2 - 3 \\
 &= 2\left(x - 1\right)^2 + (-3)
 \end{aligned}$$

พาราโบลางาย จุดต่ำสุดอยู่ที่ $(1, -3)$ ค่าต่ำสุดคือ $y = -3$ แกนสมมาตรคือ $x = 1$

ปกติแล้วเราจะไม่แปลงสมการ $y = a(x - h)^2 + k$ กลับไปอยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ แต่จะแสดงให้เห็นเพื่อความครบถ้วนของเนื้อหา

$$\begin{aligned} y &= a(x - h)^2 + k \\ &= a(x^2 - 2hx + h^2) + k \\ &= ax^2 - 2ahx + ah^2 + k \\ &= ax^2 + (-2ah)x + (ah^2 + k) \end{aligned}$$

ให้ชื่อตัวแปรใหม่ $b = -2ah$ และ $c = ah^2 + k$ ได้ว่า

$$y = ax^2 + bx + c$$

ตัวอย่าง จงจัดรูปสมการพาราโบลา $y = -3(x - 3)^2 - 3$

$$\begin{aligned} y &= -3(x - 3)^2 - 3 \\ &= -3(x^2 - 6x + 9) - 3 \\ &= -3x^2 + 18x - 27 - 3 \\ &= -3x^2 + 18x - 30 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงจัดรูปสมการพาราโบลา $y = 3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} y &= 3(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \\ &= 3(x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} \\ &= 3x^2 + 3x + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \\ &= 3x^2 + 3x + 1.25 \end{aligned}$$

เรียบเรียงโดยพรเทพ ชัยกิจวัฒน์ (www.intellectworld.com)